

№ 15-дәріс.

Тақырыбы: Дәрежелік қатарлардың қолданыстары.

Тейлор қатары

$y = f(x)$ функциясының қандай да бір a нүктесінің аймағында $(n+1)$ -ші ретті туындысы бар болсын. Дәрежесі n -нан жоғары емес төмендегі теңдік орындалатын $P_n(x)$ көпмүшелігін табалық:

$$P_n(a) = f(a), P_n'(a) = f'(a), \dots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \quad (5)$$

$P_n(x)$ көпмүшелігін мына түрде іздейміз:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n$$

$P_n^{(i)}(x)$ -ті тауып және (5) шартын қолдансақ:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ - қалдық мүшесі болсын. Онда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ және $R_n(x)$ - ті Лагранж формасында жазуға болатынын көрсетуге болады:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi = a + \Theta(x-a), \quad 0 < \Theta < 1$$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (6)$$

(6) формуласы Тейлор формуласы деп аталады, ал $a = 0$ болса, Маклорен формуласы деп аталады.

Бұл формулалар $y = f(x)$ функциясын $P_n(x)$ көпмүшелігімен $|R_n(x)|$ -ға тең дәлдікте айырбастауға мүмкіндік береді.

Мысал б. $y = e^x$ функциясын Маклорен формуласы бойынша жікте және e санын $\varepsilon = 10^{-5}$ дәлдікке дейін есепте.

$$y = f(x) = e^x, f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow f'(x) = e^x, f'(0) = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = e^x, f^{(n+1)}(\xi) = f(\Theta x) = e^{\Theta x} \Rightarrow$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}, \quad 0 < \Theta < 1$$

$$x = 1 \quad \text{болса, } R_n(1) = \frac{1}{(n+1)!} e^{\Theta} < \frac{3}{(n+1)!} \quad . \quad n = 1, 2, 3, \dots, 7 \quad \text{үшін: } \frac{3}{(n+1)!} > 10^{-5} \quad , \quad \text{ал}$$

$n = 8$ үшін: $\frac{3}{9!} < 10^{-5}$ болғандықтан, $n = 8$. Сонымен,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!} = 2.71828 \quad .$$

a нүктесінің аймағында $y = f(x)$ функциясы шексіз рет дифференциалданатын болсын. Онда n -ді өте үлкен шама деп ала отырып, (4) теңдігінің оң жағында дәрежелік функция аламыз. Қандай шарт орындалғанда бұл қатардың қосындысы $S(x) = f(x)$ тең?

Теорема 6. Егер $f(x)$ функциясы $D = (a-r; a+r)$ интервалында шектеусіз рет дифференциалданатын болса және $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in D$, онда D -да:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots, \quad (7)$$

Әрі, қатардың $f(x)$ функциясына D -да жинақталуы бірқалыпты.

Анықтама 6. (7) қатары Тейлор қатары деп аталады, ал егер $a = 0$ болса, ол Маклорен қатары болады.

Әрбір элементар функция үшін $(a - R; a + R)$ интервалында Тейлор қатарына жіктелетіндей a және R сандары табылатындығын айта кеткен жөн. Кейбір функциялардың Тейлор қатарына жіктелуін дәлелдеусіз көрсетеміз:

1. $y = e^x, \quad R = \infty \Rightarrow -\infty < x < \infty$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

2. $y = \sin x, \quad -\infty < x < \infty$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

3. $y = \cos x, \quad -\infty < x < \infty$

$$\cos x = \dots$$

4. $y = \ln(1+x), \quad -1 < x < 1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

5. $y = (1+x)^m, \quad m - const, \quad -1 < x < 1$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n + \dots$$

Е с к е р т у . Көрсетілген жіктеулерді күрделі функциялар үшін де қолдануға болады. *Мысалы:*

1. $\ln(1-x) = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots, \quad -1 < x < 1$

2. $\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$

3. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = [1 + (-x^2)]^{-\frac{1}{2}}. (1+x)^m$ жіктелуіндегі $m = -\frac{1}{2}$ деп есептейміз және x -тің

орнына $(-x^2)$ -ты қоямыз. жинақтылық интервалы: $|-x^2| = |x^2| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ болады және:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$$

4) $y = \arcsin x. y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ болғандықтан, $-1 < x < 1$ үшін:

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x (1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^6 + \dots) dt \Rightarrow$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Бұл қатар $x = \pm 1$ болғанда жинақты екенін көрсетуге болады. Онда $x = 1$ болғанда:

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \dots$. Бұл π -ді есептеу формуласы.

Алғашқы функциясы элементар функциялар болмайтын интегралдарды кейде қатарлардың көмегімен есептеуге болады.

Мысал 7. $I = \int_0^a e^{-x^2} dx$ интегралын есепте.

Шешуі. $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$, $-\infty < x < \infty$, екенін ескеріп, екі жағын да

интегралдасак:

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{-x^2} dx &= \int_0^a \left[1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right] dx = \left(x - \frac{1}{1!} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \right) \Bigg|_0^a = \\ &= a - \frac{1}{1!} \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{a^5}{5} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{a^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Тейлор қатары, жалпы айтқанда, дәрежелік қатарлар дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін табу үшін жиі қолданылады.

Мысал 8. Берілген теңдеуінің жалпы шешімін тап:

Шешуі. $y'' = 2xy' + 4y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Шешімді $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ түрінде іздейміз.

Бастапқы шарттарды ескерсек: $a_0 = y(0) = 0$, $a_1 = y'(0) = 1$.

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$y' = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots + n \cdot (n-1)a_nx^{n-2} + \dots$$

Ары қарай, y, y', y'' -терді теңдеуге қойып, x -тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестірсек:

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$3 \cdot 2 \cdot a_3 = 2 + 4 \Rightarrow a_3 = 1$$

$$4 \cdot 3 \cdot a_4 = 4a_2 + 4a_2 \Rightarrow a_4 = 0$$

.....

$$n(n-1)a_n = (n-2) \cdot 2a_{n-2} + 4a_{n-2} \Rightarrow a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1}$$

Ендеше, $a_{2k} = 0, k = 1, 2, \dots$.

$$a_5 = \frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{1}{2!}, a_7 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2!}}{6} = \frac{1}{3!}, \dots, a_{2k+1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{(k-1)!}}{2k} = \frac{1}{k!}, \dots$$

Бұдан, дербес шешім

$$y = x + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Мысал 9. $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясын $x = 1$ аймағындағы Тейлор қатарына жікте.

Шешуі. Туындыларын табамыз:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f''(x) = \frac{1 \cdot 2}{x^3}, f'''(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}, f^{(4)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}, \dots$$

$x = 1$ болғанда:

$$f(1) = 1, f'(1) = -1, f''(1) = 1 \cdot 2, f'''(1) = -1 \cdot 2 \cdot 3, f^{(4)}(1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \dots$$

$$\dots, f^{(n)}(1) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = (-1)^n \cdot n!, \dots$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ функциясының $x = 1$ аймағындағы Тейлор қатары мына түрде болады:

$$1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + \dots + (-1)^n (x - 1)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x - 1)^n.$$

Алынған қатар еселігі $q = -(x - 1)$ болатын геометриялық қатар:

$$|q| = |x - 1| < 1 \Rightarrow -1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2.$$

Ендеше, қатар $x \in (0, 2)$ аралығында абсолютті жинақты. Онда

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x - 1)^n, \quad x \in (0, 2).$$

Мысал 10. Берілген функцияны Тейлор қатарына жікте:

$$f(x) = \frac{5 - x}{12 - x - x^2}.$$

Шешуі. Берілген бөлшекті қарапайым бөлшектерге жіктейміз:

$$\frac{5 - x}{12 - x - x^2} = \frac{5 - x}{(x + 4)(3 - x)} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{3 - x};$$

$$5 - x = A(3 - x) + B(x + 4).$$

Бұдан, $x = 3$ және $x = -4$ дей отырып, $A = \frac{9}{7}$, $B = \frac{2}{7}$ екендігін аламыз. Ендеше,

$$\frac{5 - x}{12 - x - x^2} = \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{x + 4} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3 - x}. \quad (8)$$

$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \dots = \frac{a}{1 - q}$, $|q| < 1$ формуласын қолданып, әрбір қарапайым бөлшектерді

жеке-жеке қарастырамыз:

$$\frac{1}{x + 4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{4}\right)} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4^2} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{4^n} + \dots \right), \quad \left| \frac{x}{4} \right| < 1;$$

$$\frac{1}{3 - x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \dots + \frac{x^n}{3^n} + \dots \right), \quad \left| \frac{x}{3} \right| < 1.$$

Табылған жіктеуді (8)-ге қойсақ:

$$\frac{5-x}{12-x-x^2} = \frac{9}{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{4^{n+1}} + \frac{2}{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{9}{7} \cdot \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} + \frac{2}{7 \cdot 3^{n+1}} \right] x^n,$$

және $\begin{cases} -4 < x < 4, \\ -3 < x < 3, \end{cases} \Rightarrow x \in (-3, 3)$ болады.

Сонымен, $\frac{5-x}{12-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9 \cdot (-1)^n}{7 \cdot 4^{n+1}} + \frac{2}{7 \cdot 3^{n+1}} \right) \cdot x^n, \quad x \in (-3, 3).$

Мысал 11. $f(x) = \sin^2 x$ функциясын Тейлор қатарына жікте.

Шешуі. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ екені бізге мектеп курсынан белгілі..

$\cos 2x$ функциясын 3 пункттегі формула бойынша жіктесек (x -ті $2x$ -ке ауыстырсақ), онда:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \text{ егер}$$

$x \in (-\infty, +\infty).$

Мысал 12. $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$ функциясын Тейлор қатарына жікте.

Шешуі. $\ln \frac{2+x}{2-x} = \ln \frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} = \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) - \ln \left(1 - \frac{x}{2} \right)$ қарастырамыз.

5 пункттегі жіктеуді қолдансақ, x -ті сәйкесінше $\frac{x}{2}$ және $(-\frac{x}{2})$ -пен алмастырсақ:

$$\begin{aligned} \ln \frac{2+x}{2-x} &= \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{2^n \cdot n} + \dots \right) - \\ &- \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} - \dots - \frac{x^n}{2^n \cdot n} - \dots \right) = x + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2^{2n} (2n+1)} + \dots \end{aligned}$$

Алынған жіктеу дұрыс болады, егер $\left| \frac{x}{2} \right| < 1$, яғни, $|x| < 2$ болса.

Мысал 13. $f(x) = \sqrt{1-x}$ функциясын Тейлор қатарына жікте.

Шешуі.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n + \dots,$$

мұндағы $x \in (-1, 1)$, жіктеуін қолданамыз. $m = \frac{1}{2}$ деп алып, x -ті $(-x)$ -ке айырбастасақ,

онда

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots$$

Жіктеу дұрыс болады, егер $|-x| < 1$, яғни, $|x| < 1$.